

## Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

### Übungsblatt 4

**Definition 1.** (vom letzten Blatt) Sei  $S$  eine Sprache und  $\mathfrak{A}$  eine  $S$ -Substruktur von  $\mathfrak{B}$ . Ist  $\mathfrak{M}$  eine Erweiterung von  $\mathfrak{A}$  durch Belegung von Variablen, so ist  $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$  die Funktion mit Definitionsmenge  $\{\forall\} \cup S \cup Var$ , welche  $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \upharpoonright (\{\forall\} \cup S) = \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \upharpoonright Var = \mathfrak{M} \upharpoonright Var$  erfüllt.

Wir sagen dass  $\varphi$  aus  $L^S$  absolut zwischen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ist, falls  $\mathfrak{M}(\varphi) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(\varphi)$  für jede Erweiterung  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{A}$  durch Belegung von Variablen.

**Aufgabe 1:** (3 Punkte) Beweisen Sie folgende Aussagen.

- Die Menge der zwischen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  absoluten Formeln ist abgeschlossen unter Negation, Konjunktion und Disjunktion.
- Jede quantorenfreie Formel ist absolut zwischen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  (quantorenfreie Formeln sind solche Formeln, in denen keine Quantoren ( $\forall/\exists$ ) auftreten).
- Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
  - $\mathfrak{A}$  ist elementare Unterstruktur von  $\mathfrak{B}$ , d.h. jedes  $\varphi$  aus  $L^S$  ist absolut zwischen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ .
  - Ist  $\varphi$  aus  $L^S$  und  $\mathfrak{M}$  eine Erweiterung von  $\mathfrak{A}$  durch Belegung von Variablen, so impliziert  $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(\exists x\varphi) = 1$  bereits  $\mathfrak{M}(\exists x\varphi) = 1$ .

**Aufgabe 2:** (4 Punkte) Sei  $S$  eine Sprache,  $\Phi \subseteq L^S$  und  $\varphi, \psi \in L^S$ .

- Zeigen Sie:  $\Phi \models (\varphi \wedge \psi)$  genau dann, wenn  $\Phi \models \varphi$  und  $\Phi \models \psi$ .
- Zeigen Sie: Wenn  $\Phi \models \varphi$  oder  $\Phi \models \psi$ , dann  $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$ .
- Geben Sie  $S, \Phi, \varphi, \psi$  an, so dass  $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$ , aber weder  $\Phi \models \varphi$ , noch  $\Phi \models \psi$ .
- Zeigen Sie: Wenn  $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$  und  $\Phi \models \neg\varphi$ , dann gilt  $\Phi \models \psi$ .
- Gilt für alle  $S, \Phi, \varphi, \psi$  dass  $\Phi \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$  genau dann wenn  $\Phi \models \varphi$  zu  $\Phi \models \psi$  äquivalent ist?

**Aufgabe 3:** (4 Punkte) Sei  $S$  eine Sprache,  $\varphi \in L^S$  und seien  $x$  und  $y$  Variablen, so dass  $y$  nicht frei in  $\varphi$  vorkommt. Wir schreiben  $\exists^1 x\varphi$  für  $\exists x(\varphi \wedge \forall y(\varphi \frac{y}{x} \rightarrow x \equiv y))$ . Zeigen Sie, dass in jedem  $S$ -Modell  $\mathfrak{M}$  gilt:

$$\mathfrak{M} \models \exists^1 x\varphi \text{ gdw es genau ein } a \in M \text{ gibt mit } \mathfrak{M} \frac{a}{x} \models \varphi.$$

**Aufgabe 4:** (2 Punkte) Sei  $S$  eine Sprache,  $t, t_0, \dots, t_n \in T^S$  und  $y, x_0, \dots, x_n$  Variablen. Zeigen Sie: Wenn  $y \in \text{var}(t \frac{t_0 \dots t_n}{x_0 \dots x_n})$ , so ist  $y \in \text{var}(t_0) \cup \dots \cup \text{var}(t_n)$  oder ( $y \in \text{var}(t)$  und  $y \neq x_i$  für  $0 \leq i \leq n$ ).